17/02/20

Ώρες γραφείου: Τετάρτη $16^{15} - 17^{15}$

- ΟΜΑΔΕΣ ~ Παράδειγμα $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{Z}_n,+)$ για $n\geq 1$, $(U(\mathbb{Z}_n))$ για $n \geq 1$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, Αντιστρέψιμοι τετραγωνικοί πίνακες
- ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ ~ Παράδειγμα $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ $n\geq 1$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ (τετραγ. πίνακες, $+$, $\cdot$)

Ορισμός: Έστω S μη κενό σύνολο. Μια πράξη $*$ στο S είναι μια απεικόνιση $*: S\times S \to S$

Παρατήρηση: Για $s_1, s_2 \in S$ συχνά συμβολίζουμε το $*(s_1,s_2)$ με $s_1 * s_2$.

Παράδειγμα:

1) Η $*: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $*(a,b) = a+e^b+b^5-b^{2020}$ είναι πράξη στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός: Έστω $S\neq\emptyset$ σύνολο, και $*$ πράξη στο S. Η $*$ λέγεται ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ αν $(a*b)*c = a*(b*c)$ για κάθε $a,b,c\in S$.

Παράδειγμα:

Η πράξη $*$ στο παράδειγμα 1 δεν είναι προσεταιριστική.

$(0*0)*1 = 1*1 = 1+e+1-1 = e+1$

$0*(0*1) = 0*e = e^e + e^5 - e^{2020}$

Παράδειγμα: Έστω $S = \mathbb{Q}$. Ορίζω:

$$*_1 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad *_1(a,b) = a+b$$
$$*_2 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad *_2(a,b) = a-b$$

Είναι οι $*_1, *_2$ πράξεις στο $\mathbb{Q}$;

Είναι η πράξη $*_1$ προσεταιριστική;

Ναι, γιατί αν $a,b,c \in \mathbb{Q}$, $(a+b)+c = a+(b+c)$

Είναι η πράξη $*_2$ προσεταιριστική;

Συμβολικά:

$(a *_2 b) *_2 c = (a-b) *_2 c = a-b-c$

$a *_2 (b *_2 c) = a - (b *_2 c) = a-(b-c) = a-b+c$

Άρα η πράξη $*_2$ όχι προσεταιριστική, γιατί

$(0 *_2 0) *_2 1 = -1$ ενώ $0 *_2 (0 *_2 1) = 1$.

Ορισμός: Αν $(S,*)$ σύνολο με πράξη και S πεπερασμένο, ορίζεται ο ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΗΣ ΠΡΑΞΗΣ ως εξής:

Έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$

Ο πίνακας της πράξης είναι ο:

	s_1	s_2	$\cdots$	s_n
s_1	s_1*s_1	s_1*s_2	$\cdots$	s_1*s_n
s_2	s_2*s_1	s_2*s_2	$\cdots$	s_2*s_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
s_n	s_n*s_1	s_n*s_2	$\cdots$	s_n*s_n

Παράδειγμα: Έστω $(S,*) = (\mathbb{Z}_2, +)$ δηλαδή

$$S = \mathbb{Z}_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$$

και $*$ είναι η πρόσθεση στο $\mathbb{Z}_2$.

Ο πίνακας της πράξης είναι:

	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[1]_2$	$[1]_2$	$[0]_2$

Αν $(S,*) = (U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ τότε
$S = \{[a]_8 : 1 \leq a \leq 8, \text{ΜΚΔ}(a,8) = 1\}$
$= \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$
και ο πίνακας της πράξης είναι:

	$[1]_8$	$[3]_8$	$[5]_8$	$[7]_8$
$[1]_8$	$[1]_8$	$[3]_8$	$[5]_8$	$[7]_8$
$[3]_8$	$[3]_8$	$[1]_8$	$[7]_8$	$[5]_8$
$[5]_8$	$[5]_8$	$[7]_8$	$[1]_8$	$[3]_8$
$[7]_8$	$[7]_8$	$[5]_8$	$[3]_8$	$[1]_8$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο. Αυτό συμβαίνει γιατί η πράξη είναι μεταθετική (η αντιμεταθετική).

Ορισμός: Η πράξη $*$ στο S λέγεται ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ αν $a*b = b*a$ για κάθε $a,b \in S$.

Ορισμός: Έστω $*$ πράξη στο S και $e \in S$. Το e λέγεται ουδέτερο στοιχείο της S αν $e*a = a$ και
$a*e = a$ για κάθε $a \in S$.

Παράδειγμα: Όπως μας λέει και ο πίνακας της πράξης $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ το $[1]_8$ είναι ουδέτερο στοιχείο της πράξης.

Παρατήρηση: Τα στοιχεία κάθε γραμμής του πίνακα πράξης $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ είναι διαφορετικά ανά δύο. Επίσης το ίδιο ισχύει για τις στήλες του πίνακα. Θα δούμε ότι αυτό έπεται από το ότι η πράξη $\cdot$ είναι ομάδα δηλαδή προσεταιριστική, έχει ουδέτερο και κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο.

<u>Πρόταση:</u> Έστω $*$ πράξη στο σύνολο S. Υποθέτουμε $e, e' \in S$ ουδέτερα στοιχεία για την πράξη $*$. Τότε $e = e'$.

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε: $e = e * e'$ (γιατί e' ουδέτερο)

$= e'$ (γιατί e ουδέτερο).

<u>Παράδειγμα πράξεων χωρίς ουδέτερο.</u>

1) Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Τότε η πράξη πρόσθεση στο $\mathbb{N}$ <u>δεν</u> έχει ουδέτερο

γιατί αν $a \in \mathbb{N}$ και $b \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, άρα $a + b \geq b + 1 > b$

άρα $a + b \neq b$.

2) Έστω S το σύνολο $2\mathbb{Z}$ των άρτιων ακεραίων με πράξη πολλαπλασιασμό ακεραίων. Η πράξη είναι καλά ορισμένη γιατί αν $a, b \in S$ υπάρχουν $a', b' \in \mathbb{Z}$ με $a = 2a'$

$b = 2b'$ άρα $a \cdot b = (2a')(2b') = 2(2a'b') \in S$

Ισχυρ.: Το $(S, \cdot)$ δεν έχει ουδέτερο στοιχείο.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $a \in S$ ουδέτερο, θα βρούμε αντίφαση.

$a \in S$, υπάρχει $a' \in \mathbb{Z}$ με $a = 2a'$

Αφού a ουδέτερο, $a \cdot 2 = 2$

Άρα $(2a') \cdot 2 = 2 \Rightarrow 4a' = 2 \Rightarrow 2a' = 1$

Αντίφαση γιατί για $a' \in \mathbb{Z}$, $2a' \neq 1$.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $*$ πράξη στο σύνολο S και S_1 μη κενό υποσύνολο του S. Λέμε ότι το S_1 είναι <u>ΚΛΕΙΣΤΟ</u> ως προς την πράξη $*$ αν $a \in S_1$, $b \in S_1$ συνεπάγεται $a * b \in S_1$

Αν αυτό ισχύει, τότε ο περιορισμός της πράξης $*$ στο $S_1 \times S_1$ ορίζει πράξη στο S_1.

Παράδειγμα: Έστω $S=(\mathbb{Z},\cdot)$.
Αν S_1 = άρτιοι ακέραιοι, δείξαμε ότι S_1 κλειστό ως προς την πράξη.
Έστω S_2 το σύνολο των περιττών ακεραίων. Τότε το S_2 είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό. Πράγματι
Έστω $a,b\in S_2$. Άρα υπάρχουν $a',b'\in\mathbb{Z}$, με $a=2a'+1$
$b=2b'+1$
Συνεπώς $ab=(2a'+1)(2b'+1)=2(2a'b'+a'+b')+1$ που είναι στο S_2.

Προσοχή: Αν η πράξη στο $\mathbb{Z}$, είναι η πρόσθεση, το S_1 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.
$((2a')+(2b'))=2(a'+b')$ αλλά το S_2 δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση γιατί $1\in S_2$, αλλά $1+1\notin S_2$.

Άσκηση: θεωρούμε το $(\mathbb{Z},\cdot)$. Ορίζουμε για $i=0,1,2,3$
$S_i=\{k\in\mathbb{Z},$ με $k\equiv i \bmod 4\}$. Ποια από τα ακόλουθα σύνολα είναι κλειστά ως προς τον $\cdot$.

S_0, S_1, S_2, S_3
$S_0\cup S_1, S_0\cup S_2, S_0\cup S_3,$
$S_1\cup S_2, S_1\cup S_3, S_2\cup S_3$
$S_0\cup S_1\cup S_2, S_0\cup S_1\cup S_3,$
$S_0\cup S_2\cup S_3, S_1\cup S_2\cup S_3$.

Ορισμός: Έστω $*$ πράξη στο σύνολο S που έχει ουδέτερο στοιχείο $e\in S$. Έστω $a\in S$. Το a λέγεται αντιστρέψιμο στο S αν υπάρχει $b\in S$ με $a*b=e$ και
$b*a=e$
Τότε το b λέγεται ΕΝΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ του a.

Πρόταση: Έστω $*$ προσεταιριστική πράξη στο S με ουδέτερο στοιχείο $e \in S$.
Έστω $a \in S$. Υποθέτουμε $b, b' \in S$, αντίστροφα του a. Τότε $b = b'$

Απόδειξη

Από υπόθεση $a * b = e$

$$b * a = e$$

$$a * b' = e$$

$$b' * a = e$$

Έχουμε $b' = b' * e = b' * (a * b) =$ ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ

$$= (b' * a) * b = e * b = b$$

Παράδειγμα: Έστω $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ με πράξη $*$ όπως στον πίνακα πράξης.

	s_1	s_2	s_3
s_1	s_1	s_2	s_3
s_2	s_2	s_1	s_1
s_3	s_3	s_1	s_1

Τότε, το s_1 είναι ουδέτερο στοιχείο της πράξης. Επιπλέον το s_1 έχει δύο αντίστροφα το s_2 και το s_3.
(Φυσικά, από την ΠΡΟΤΑΣΗ έπεται ότι η πράξη ΔΕΝ είναι προσεταιριστική)

Ορισμός: Έστω $(S, *)$ σύνολο με πράξη. Το $(S, *)$ λέγεται ΟΜΑΔΑ αν η πράξη είναι προσεταιριστική, έχει ουδέτερο και κάθε στοιχείο του S αντιστρέφεται.

Παρατήρηση: Έστω $(G, *)$ ΟΜΑΔΑ. Από τη παραπάνω πρόταση έπεται ότι το ουδέτερο στοιχείο e_G της G είναι μοναδικό και ότι αν $a \in G$, ο αντίστροφος του a είναι μοναδικός. Τον συμβολίζουμε a^{-1}.

Πιο γενικά αν $(S, *)$ προσεταιριστική πράξη και $a \in S$ αντιστρέψιμο, από την Πρόταση ο αντίστροφος του a είναι μοναδικός και θα τον συμβολίζουμε a^{-1}.

<u>Παραδείγματα Ομάδων.</u>

1) Το $\mathbb{Z}$ με πράξη πρόσθεση
(Το ουδέτερο είναι το 0, το "αντίστροφο ως προς την πρόσθεση" του $a \in \mathbb{Z}$ είναι το $-a$.

2) Το $\mathbb{Q}$ με την πρόσθεση
3) Το $\mathbb{R}$ με την πρόσθεση
4) Το $\mathbb{C}$ με την πρόσθεση
(με ουδέτερο το 0 και για $a, b \in \mathbb{R}$ "αντίστροφο ως προς την πρόσθεση" του $a+bi$ το $(-a)+(-b)i$

5) Το $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό
6) Το $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό
7) Το $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0+0i\}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό
είναι ομάδα με ουδέτερο το $1+0i$ και για $a, b \in \mathbb{R}$ με $(a,b) \neq (0,0)$ αντίστροφο του $z = a+bi$ του $\frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$